Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

И.В. Червенчук, О.П. Шафеева

РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Методические указания

Омск 2006

Составители: И.В. Червенчук, канд. техн. наук, доцент
О.П. Шафеева, канд. техн. наук, доцент

Рассмотрены методы минимизации переключательных функций, разъясняются основные приемы построения комбинационных схем в различных базисах, дается понятие об алгебре высказываний. Приводятся иллюстративные примеры преобразования логических функций и построения комбинационных схем.

Методические указания предназначены для самостоятельной проработки студентами практических заданий по дисциплине «Дискретная математика», содержат материал для подготовки к экзаменам.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Редактор С.Г. Восканян
ИД № 06039 от 12.10.01
Свод. Темплан 2005 г.
Подписано в печать. Формат 60×84 $^1/_{16}$.Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,0. Уч. изд. л. 2,0
Тираж 200 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 64450, Омск, пр. Мира, 11, тел. 23-02-12.
Типография ОмГТУ

Практическое занятие 1 МИНИМИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ КАРТ КАРНО

Цель занятия: изучение способов задания переключательных функций и их минимизация с использованием карт Карно.

Порядок выполнения задания и содержание отчета

1. Построить дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) заданной переключательной функции и представить ПФ картой Карно.
2. Минимизировать ПФ с помощью карты Карно по «единицам» и «нулям». Выбрать минимальное покрытие.
3. Построить минимальные дизъюнктивную (ДНФ) и конъюнктивную (КНФ) нормальные формы ПФ.

Рассмотрим порядок выполнения задания на примерах минимизации ПФ трех, четырех и пяти переменных.

Пример 1

Пусть задана ПФ трех (n=3) переменных в виде совершенной ДНФ (СДНФ)

$$f_1 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \qquad (1)$$

Карта Карно для данной ПФ (рис.1) состоит из $2^n = 8$ клеток. Каждая клетка карты описывается тремя (n=3) координатами, причем любые соседние клетки отличаются одной координатой [4, 5].

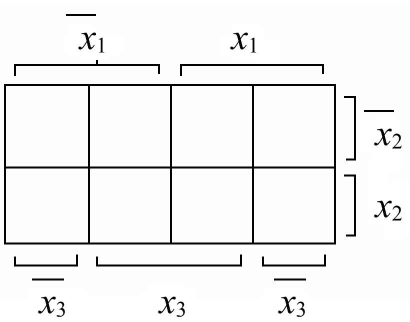
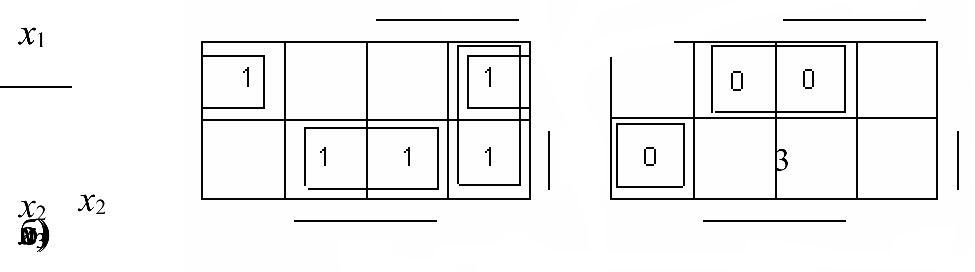


Рис. 1. Карта Карно для функции трех переменных

Для минимизации ПФ по «единицам» при определении минимальной ДНФ на карте Карно ставится «1» в клетке, описываемой набором координат, на котором функция принимает единичное значение (рис.2, а). Затем находится покрытие единиц карты Карно минимальным количеством прямоугольников максимальных размеров со сторонами длиной, кратной степени двойки, т.е. $2^i \times 2^j$, где i, j - целые числа. Минимальное покрытие единиц для функции f_1 (см. рис.2, а) выделено прямоугольниками, содержащими $2^0 \times 2^1$ и $2^1 \times 2^0$ клеток.

Каждый прямоугольник (см. рис.2, а) образует 1-куб, поскольку объединяет две соседние клетки карты Карно, отличающиеся по одной координате, и, следовательно, подвергается операции склеивания: $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_3$, $x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 = x_2x_3$. Клетки, лежащие на границах карты Карно, также является соседними: $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_2\bar{x}_3$. Одна и та же клетка может покрываться несколькими различными прямоугольными (клетка с координатой $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ покрывается двумя прямоугольниками $x_1\bar{x}_3$ и $\bar{x}_2\bar{x}_3$).



Отсюда следует, что каждому полученному

прямоугольнику карты ставится в соответствии некоторая конъюнкция, в которой отсутствуют переменные, изменяющие в данном прямоугольнике свои значения.

Дизъюнкция элементарных конъюнкций, описывающих полученные на карте Карно (рис.2, а) прямоугольники, образует минимальную ДНФ функции:

$$f_1 = x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Для построения ПФ в виде минимальной КНФ целесообразно произвести минимизацию обратного значения ПФ по «нулям». Для этого на карте Карно в клетки с координатами, соответствующими наборам переменных, на которых ПФ принимает нулевые значения, ставиться «0». Далее для нулевых клеток находится минимальное покрытие.

Карта Карно для обратного значения ПФ $\bar{f}$, имеет вид (рис. 2, б), ей соответствует минимальная ДНФ

$$\bar{f}_1 = \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3. \qquad (2)$$

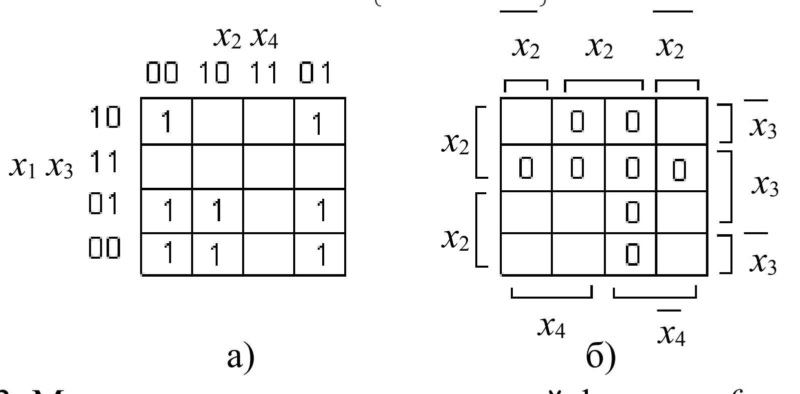
Поскольку цена покрытия (количество букв в r-кубах, покрывающих все «1» или «0» Карно) ($C_{\bar{f}_1} = 5$), представляющего обратное значение ПФ f_1, меньше цены покрытия ее прямого значения ($C_{f_1} = 6$), то минимальная ДНФ для обратного значения ПФ $\bar{f}_1$ (2) является более простой.

Используя правила Моргана, из (2) получаем минимальную КНФ ПФ:

$$f_1 = \overline{\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3} = \overline{(\bar{x}_2x_3)}\,\overline{(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3)} = (x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

Пример 2 Пусть ПФ четырех переменных задана в виде комплекса 0-кубов:

$$K^0(f_2) = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\}$$



а) б)

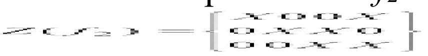
Рис. 3. Минимизация переключательной функции f_2 четырех переменных

Данной ПФ соответствует СДНФ

$$f_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee$$
$$\vee\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$$

и карта Карно (рис.3, а).

Из рис. 3, а следует, что все единицы заданной ПФ покрываются тремя 2-кубами, представляющими прямоугольники из четырех соседних клеток карты Карно. Тогда минимальное покрытие ПФ f_2 и минимальная ДНФ примут вид

 , $f_2 = \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_{2_1} \vee \overline{x}_1 \overline{x}_4 .$ (3)

Минимизация обратного значения данной ПФ f_2 на карте Карно (рис.3, б)
$\overline{f}_2 = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_4$ дает КНФ
$f_2 = \overline{x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_4} = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_4).$

Пример 3

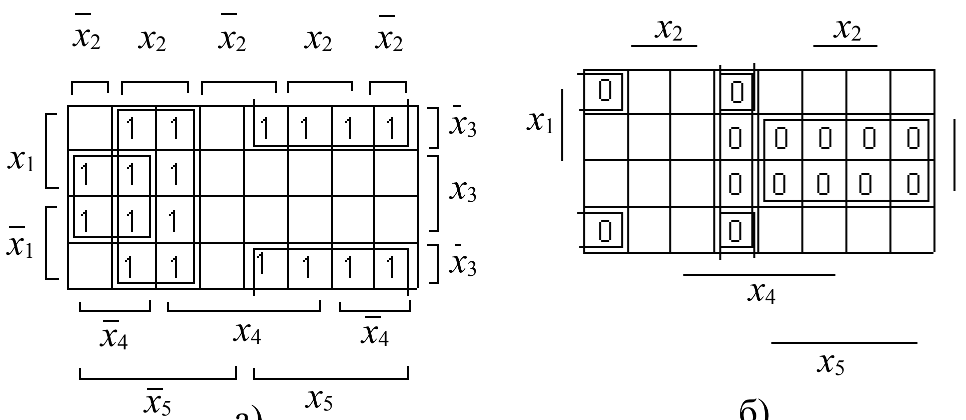
Рассмотрим минимизацию ПФ, заданной с помощью числового представления f_3=V(1, 2, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 30).

Поскольку номер набора определяет 0-куб и, следовательно, набор переменных, на котором функция равна единице, СДНФ ПФ f_3 представляется в виде:

$$f_3 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_5 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_5 \vee$$
$$\vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_5 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 x_4 \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x}_5 \vee$$
$$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 x_5 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 x_5 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 x_5 \vee$$
$$\vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 x_5 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 x_5 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 .$$

Карта Карно для ПФ f_3 построена на рис. 6, а. Минимальное покрытие единиц карты определено прямоугольниками с размерами $2^1 \times 2^1 = 4$, $2^1 \times 2^2 = 8$, $2^2 \times 2^1 = 8$, объединяющими по 4 и 8 соседних клеток и образующих 2- и 3-кубы.

$$f_3 = x_2 \overline{x}_5 \vee \overline{x}_3 x_5 \vee x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5$$



а) б)

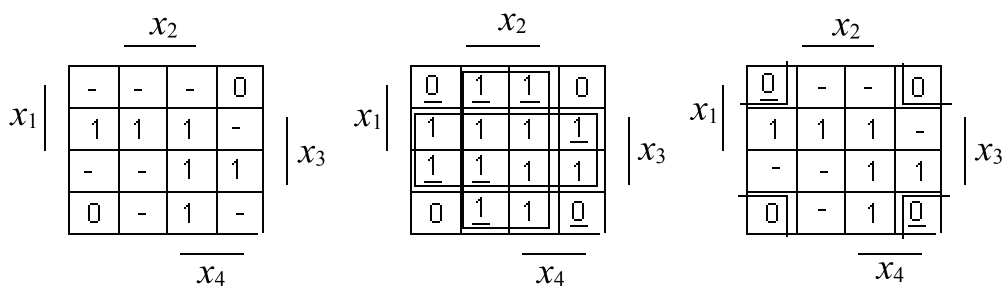
Рис. 4. Определение минимальных ДНФ (а) и КНФ (б) ПФ f_3 пяти переменных.

Кубы с наибольшей размерностью, покрывающие ПФ $f_3(\overline{x_1, x_5})$ (минимизация f_3 по «нулям»), приведены на рис.4, б. Минимальные ДНФ и КНФ представляются выражениями

$$\overline{f}_3 = \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_5 \vee \overline{x}_2 x_4 \overline{x}_5 \vee x_3 x_5, \quad f_3 = (x_2 \vee x_3 \vee x_5)(x_2 \vee \overline{x}_4 \vee x_5)(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_5).$$

Пример 4

Пусть задана неполностью определенная ПФ четырех переменных картой Карно (рис.5, а), где прочерками отмечены клетки, которым соответствуют наборы переменных, на которых функция не определена или значение булевой функции безразлично.



а) б) в)

Рис. 5. Минимизация не полностью определенной ПФ

При минимизации не полностью определенных ПФ в клетки карты Карно, заполненные прочерками, записываются нули или единицы таким образом, чтобы получить покрытие «основных» единиц («основных» нулей) наименьшим числом кубов с наибольшей размерностью. Так, для ПФ (рис. 5, а) минимизация по «единицам» (рис.5, б) и по «нулям» (рис. 5, в) дает следующие результаты:

$$f_4 = x_2 \vee x_3; \qquad \overline{f}_4 = \overline{x}_2 \overline{x}_3.$$

Практическое занятие 2 МИНИМИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ КВАЙНА – МАК-КЛАСКИ

Цель занятия: освоить минимизацию переключательных функций методом Квайна–Мак-Класки.

Порядок выполнения задания и содержание отчета

1. Построить дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) заданной переключательной функции и представить ПФ комплексом 0-кубов.
2. Минимизировать ПФ методом Квайна – Мак-Класки. Определить минимальное покрытие.
3. Построить минимальную дизъюнктивную (ДНФ) нормальную форму.

Минимизация переключательной функции методом Квайна – Мак-Класки основывается на использовании правила поглощения, позволяющего вычислить все множество 1-, 2-, … n- кубов, образующих комплекс $K(f)$. Из этого комплекса выделяются кубы наибольшей размерности, покрывающие все множество вершин функции, определяя покрытие $Z(f)$ функции. Покрытие $Z(f)$ упрощается с целью получения минимального.

Как уже отмечалось, 0-куб есть вершина, т.е. булев вектор, или набор аргументов типа «0100», «0000». 1-куб можно рассматривать как вектор, одна координата которого безразлична. Очевидно, что 1-куб может быть образован 0-кубами, различающимися только на одну единицу. Например, «0100» и «0000» образуют

1-куб «0x00». Аналогично 2-кубы образуются из 1-кубов, отличающихся только на 1 единицу (и имеющих «x» в одинаковых позициях), например «0x01» и «0x11» дадут 2-куб «0xx1» и т.д.

В задачах минимизации булевых функций используется понятие простой импликанты. Некоторый куб $z \in K$ называется *простой импликантой*, если он не содержится ни в каком другом кубе комплекса K, т.е. не является гранью никакого другого куба из этого комплекса. Совокупность всех таких кубов образует множество $Z=\{z\}$ простых импликант данного комплекса. Любой куб минимального покрытия $C_{\min}$ является простой импликантой; следовательно, $C_{\min} \subseteq Z$. Минимизация функции состоит из последовательных этапов.

1. **Нахождение простых импликант**. Все 0-кубы сравниваются попарно между собой на предмет образования 1-кубов. Если 0-кубы образуют 1-куб, они помечаются. Для упрощения данной операции удобно множество 0-кубов разбить на группы, содержащие равное число единиц, 1-кубы могут быть образованы объединением 0-кубов только из смежных групп. Аналогично производится попытка построить множество 2-кубов на базе множества 1-кубов. Этап заканчивается, когда ни один куб более высокого порядка не может быть построен. Все неотмеченные кубы комплекса $K(f)$ являются простыми импликантами и образуют покрытие $Z(f)$ функции f, которое в общем случае не является минимальным.

2. Составление таблицы покрытий. Задача данного этапа – удалить все лишние простые импликанты. Составляется так называемая таблица покрытий. Строки данной таблицы помечаются простыми импликантами, полученными на шаге 1, столбцы - 0-кубы (термы) минимизированной функции. На пересечении i-й строки и j-го столбца ставится метка 1, если i-я импликанта покрывает j-й 0-куб, т.е. соответствующие символы совпадают или покрываются символом «x» со стороны импликанты.

3. Определение существенных импликант. Если в каком-либо столбце таблицы покрытий имеется только одна метка, то соответствующая ей импликанта помечается как существенная. Данная импликанта обязательно будет входить в минимальное покрытие, поскольку без нее невозможно покрыть все 0-кубы функции, в определяемое покрытие вносят все существенные импликанты, а из таблицы вычерчиваются соответствующие строки и столбцы, покрываемые данными импликантами.

4. Вычеркивание лишних столбцов. Если в остаточной таблице, полученной после выделения существенных импликант, имеются два столбца, имеющие метки в одинаковых строках, то один из них вычеркивается, т.к. покрытие вычеркнутого столбца обеспечивается за счет покрытия оставшегося столбца.

5. Вычеркивание лишних простых импликант. Если в остаточной таблице имеются строки, не имеющие ни одной метки, импликанты, соответствующие данным строкам, вычеркиваются.

6. Нахождение минимального покрытия. В остаточной таблице, полученной после выделения существенных импликант, выбирается совокупность простых импликант, позволяющих покрыть все столбцы с минимальными затратами. С учетом проведенных вычислений записывается минимальное покрытие как объединение множества существенных импликант и простых импликант, отобранных на данном этапе.

Записывается минимальная ДНФ как дизъюнкция элементов минимального покрытия.

Рассмотрим порядок выполнения задания на примерах минимизации ПФ четырех переменных, минимизация функций с другим числом переменных производится аналогично.

Пример 5

Минимизировать методом Квайна – Мак-Класки ПФ четырех переменных, заданную в виде комплекса 0-кубов:

$$
\hat{E}^{0}(f)=\begin{array}{c}
\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9
\end{array}
\left\{\begin{array}{cccc}
\underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{x_3} & \underline{x_4}\\
0&0&0&1\\
0&0&1&0\\
1&0&0&0\\ \hline
0&0&1&1\\
1&0&0&1\\
1&1&0&0\\ \hline
0&1&1&1\\
1&1&1&0\\ \hline
1&1&1&1
\end{array}\right\}
\begin{array}{c}
\\ '\\ '\\ '\\ '\\ '\\ '\\ '\\ '\\ '
\end{array}
$$

При записи минимизируемой функции в виде комплекса K^0, удобно наборы разбить на группы (группа отделена чертой), содержащие одинаковое число единиц, и пронумеруем каждый 0-куб. В процессе вычислений будем также помечать кубы.

Построим комплекс K^1, помечая, посредством слияния каких 0-кубов или импликант создана текущая импликанта.

$$
K^{1}(f)=\begin{array}{c}
1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9
\end{array}
\left\{\begin{array}{cccc}
0&0&x&1\\
x&0&0&1\\
0&0&1&x\\
1&0&0&x\\
1&x&0&0\\ \hline
0&x&1&1\\
1&1&x&0\\ \hline
x&1&1&1\\
1&1&1&x
\end{array}\right\}
\begin{array}{c}
1-4\\1-5\\2-4\\3-5\\3-6\\4-7\\6-8\\7-9\\8-9
\end{array}
$$

Построим комплекс $K^2(f)$: $\quad K^2(f)=0$.

Пометим знаком «'» все импликанты, покрываемые кубами более высокого порядка.

Таким образом, имеем набор простых импликант:

$$
Z(f)=\left\{\begin{array}{cccc}
0&0&x&1\\
x&0&0&1\\
0&0&1&x\\
1&0&0&x\\
1&x&0&0\\ \hline
0&x&1&1\\
1&1&x&0\\ \hline
x&1&1&1
\end{array}\right\}
$$

1 1 1 x

Составляем таблицу покрытий (табл. 1).

Таблица 1

Импли-\0-куб канта \	0001	0010	1000	0011	1001	1100	0111	1110	1111
0 0 x 1	1			1					
^ x 0 0 1	1				1				
˅ 0 0 1 x		1		1					
1 0 0 x			1		1				
^ 1 x 0 0			1			1			
0 x 1 1				1			1		
^^ 1 1 x 0						1		1	
^ x 1 1 1							1		1
^^ 1 1 1 x								1	1
	^		^	˅	^	^	^	^^	^

По таблице покрытий находим существенные импликанты, таковая будет только одна (x001), пометим соответствующую единицу вертикально расположенным овалом. Строку, соответствующую существенной импликанте и покрываемые ей столбцы пометим знаком «˅» и из рассмотрения исключаем.

Далее следует решить задачу о наименьшем покрытии в остаточной таблице, т.е. покрыть минимальным количеством импликант (соответствуют строкам) все истинные наборы (или 0-кубы, соответствуют столбцам). В нашем случае любая импликанты покрывает два набора, обычно при выборе импликант отдается предпочтение тем из них, которые покрывают наибольшее число наборов (их называют короткими импликантами).

Первый столбец (0001) покрывается первой и второй импликантой (00x1 и x001). Здесь, скорее всего, лучше выбрать импликанту x001, поскольку она дополнительно поглощает столбец 1001, тогда как импликанта 00x1 поглощает еще столбец 0011, поглощенный существенной импликантой x001, которая обязательно войдет в решение. Соответствующая единица помечена горизонтально расположенным овалом, строку и столбец, соответствующие выбранной импликанте (x001) и покрываемые ей столбцы пометим знаком «^» и из рассмотрения исключаем. Действуя аналогично, рассмотрев столбец 1000 и импликанты 100x и 1x00, выберем импликанту 1x00; рассмотрев столбец 0111 и импликанты 0x11 и x111 выберем импликанту x111, после чего в таблице останется только один не выбранный столбец 1110. Для его поглощения можно выбрать любую из двух импликант: 11x0 или 111x, соответствующие столбцы и строки пометим знаком «^^».

Таким образом, в данном случае можно построить два минимальных покрытия:

$$K_{\min 1}(f)=\left\{\begin{matrix} x\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,x \\ 1\,x\,0\,0 \\ x\,1\,1\,1 \end{matrix}\right\} \qquad K_{\min 2}(f)=\left\{\begin{matrix} x\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,x \\ 1\,x\,0\,0 \\ x\,1\,1\,1 \end{matrix}\right\}$$

$$1\,1\,x\,0 \qquad\qquad 1\,1\,1\,x$$

Запишем результат в виде ДНФ:

$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}$ и

$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$.

Обе минимальные формы равноправны.

Существует формальный алгоритм, называемый алгоритмом Петрика [4, 5], позволяющий автоматизировать решение задачи о наименьшем покрытии остаточной таблицы.

Пример 6

Минимизировать методом Квайна – Мак-Класки ПФ из примера 2.

$$K^0(f_2) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{c} \\ ' \\ ' \\ ' \\ ' \\ ' \\ ' \\ ' \\ ' \end{array}$$

Запишем минимизируемую функцию из примера 2, при этом, для удобства наборы разобьем на группы, содержащие одинаковое число единиц, и пронумеруем каждый 0-куб. В процессе вычислений будем также помечать кубы.

Построим комплекс K^1, помечая, посредством слияния каких 0-кубов или импликант создана текущая импликанта.

$$K^1(f_2) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ \hline 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \end{array} \right\} \begin{array}{cc} 1-2 & ' \\ 1-3 & ' \\ 1-4 & ' \\ 1-5 & ' \\ 2-7 & ' \\ 3-6 & ' \\ 4-6 & ' \\ 4-8 & ' \\ 5-7 & ' \\ 5-8 & ' \end{array}$$

Построим комплекс $K^2(f)$:

$$K^2(f_2) = \left\{ \begin{array}{cccc} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1-9,\ 4\text{-}5 \\ 2-7,\ 3\text{-}6 \\ 3-10,\ 4\text{-}8 \end{array} \qquad K^3(f_2) = 0$$

В данном случае импликанты $K^2(f)$ покрывают все предыдущие, таким образом, имеем набор простых импликант:

$$Z(f_2) = \left\{ \begin{array}{cccc} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x \end{array} \right\}.$$

Составляем таблицу покрытий (табл. 2).

Таблица 2

Импли-\0-куб канта \	0000	1000	0100	0010	0001	0110	1001	0011
x 0 0 x	1	1			1		1	
0 x x 0	1		1	1		1		
0 0 x x	1			1	1			1

В данной таблице покрытий все импликанты являются существенными (имеют единственную единицу в столбце, соответствующие единицы обведены) . Таким образом, в данном случае имеем минимальное покрытие:

$$K_{\min}(f_2) = \left\{ \begin{matrix} x\ \ x\ 0\ \ 0 \\ 0\ x\ \ x\ \ 0 \\ 0\ 0\ \ x\ \ x \end{matrix} \right\} .$$

Запишем результат в виде ДНФ:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_3 x_4} \vee \overline{x_2 x_3} \vee \overline{x_3 x_4} .$$

Как видим, результат, полученный методом Квайна – Мак-Класки совпадает с результатом, полученным методом карт Карно.

Практическое занятие 3 СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ В БАЗИСЕ «И, ИЛИ, НЕ»

Цель занятия: изучение метода синтеза комбинационных схем в логически полном базисе «И, ИЛИ, НЕ».

Порядок выполнения задания и содержание отчета

1. Представить заданную ПФ в виде таблицы истинности, в которой всем возможным наборам аргументов поставлены в соответствие значения функции.
2. Найти минимальную ДНФ (КНФ) ПФ с помощью карты Карно.
3. Составить комбинационную схему ПФ.
4. Проверить комбинационную схему на соответствие заданной ПФ.

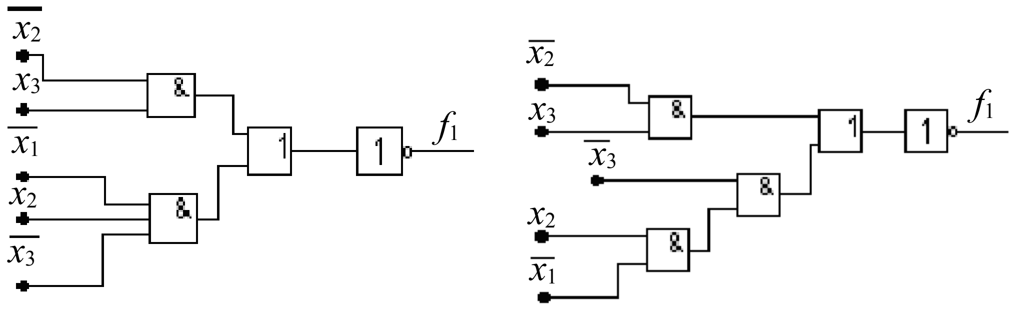
Последовательность выполнения задания покажем на примерах.

Пример 7

Пусть задана ПФ $f_1(\overline{x_1, x_3})$ из примера 1 (1). Таблица истинности для нее имеет вид табл. 3.

Таблица 3

Номер набора	Набор аргументов	Значение функции
0	000	I
1	00I	I
2	0I0	0
3	0I I	I
4	I00	0
5	I0I	0
x_2 6	I I0	I
7	I I I	I



а) б)

Рис. 6. КС в базисе И, ИЛИ, НЕ

Минимальное представление ПФ (1) найдено в примере 1 и имеет вид (2).

Если набор элементов И, ИЛИ, НЕ для синтеза КС не имеет ограничений по входам, то комбинационная схема функции (2) может быть представлена в следующем виде (рис.6, а).

При использовании лишь двухвходовых элементов операции, реализуемые на одном элементе, группируются в скобки:

$$f_1 = \overline{(\bar{x}_2 x_3) \vee (\bar{x}_1 x_2)\bar{x}_3}, \qquad (2а)$$

КС для ПФ (2а) (рис. 6, б) может быть реализована по схеме рис. 7.

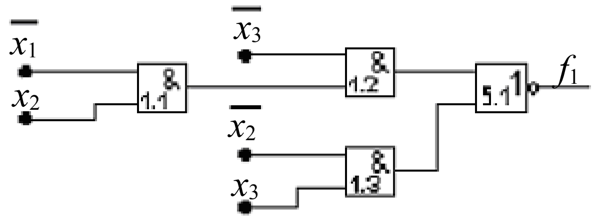


Рис.7. Комбинационная схема ПФ

Выполнение проверки правильности работы синтезированной КС (ее соответствие заданной таблицей функции) можно провести «умозрительно», подставляя все возможные входные наборы аргументов или с помощью системы схемотехнического моделирования, например Electronic Workbench. При обнаружении неисправности при контроле КС необходимо проверить правильность заполнения карты Карно, записи z-кубов при минимизации, верность построения схемы.

Пример 8

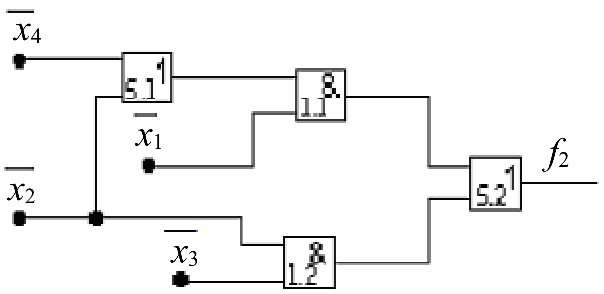
Для ПФ $f_2(\overline{x_1, x_4}) = V$ (0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 12) таблица истинности аналогична табл. 1.

Построение КС двухвходовых элементах (2И, 2ИЛИ) до минимальной ДНФ данной ПФ (3) возможно группировкой конъюнкций $f_2 = (\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$. При этом потребуется три элемента И и два элемента ИЛИ.

Вынесение же за скобки переменной x_1 и получение скобочной формы [4] ПФ

$$f_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

ведет к упрощению технической реализации, поскольку схема набора в этом случае содержит два элемента И и два элемента ИЛИ (рис. 8).



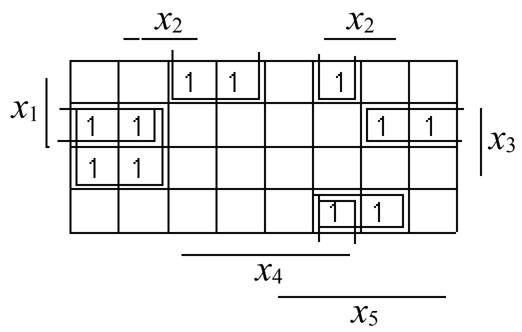


Рис. 8. Комбинационная схема ПФ f_2 Рис. 9. Задание ПФ f_3 карта Карно

Пример 9

Пусть необходимо синтезировать два варианта КС (на элементах И, ИЛИ без ограничения на число входов и на элементах 2И, 2ИЛИ) для ПФ, заданной картой Карно (рис. 9).

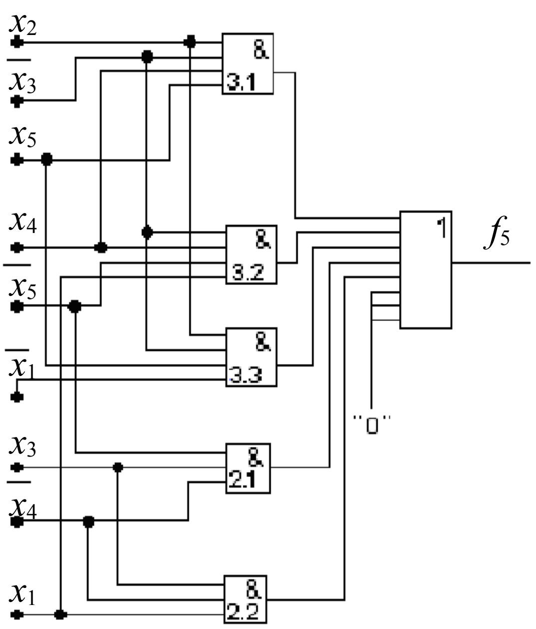
Задать такую ПФ можно, определив таблицу истинности или числовое представление ПФ (или КНФ); $f_5 = (\overline{x_1, x_5}) = V(4,5, 6,7,9,11,18,21,23,26,27)$, поскольку

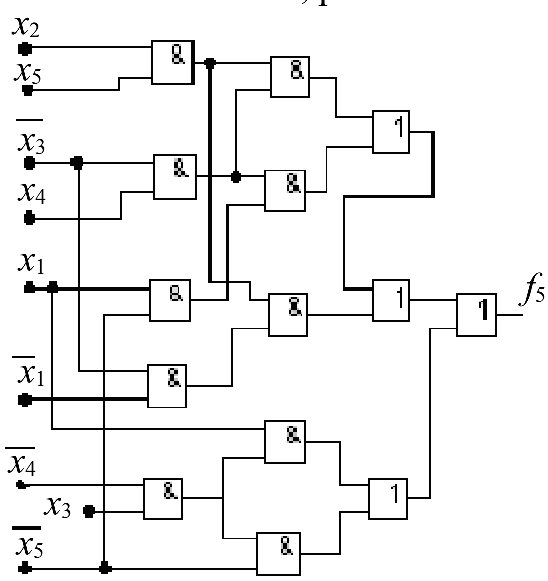
ДНФ определят номера наборов, на которых ПФ равна «1» (КНФ задает номера наборов, на которых ПФ принимает значение «0»).

Минимальная ДНФ ПФ f_5, полученная по карте Карно (рис. 9):

$f_5 = x_2\overline{x}_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x}_3x_4\overline{x}_5 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_5 \vee x_3\overline{x}_4\overline{x}_5 \vee x_1x_3\overline{x}_4$.

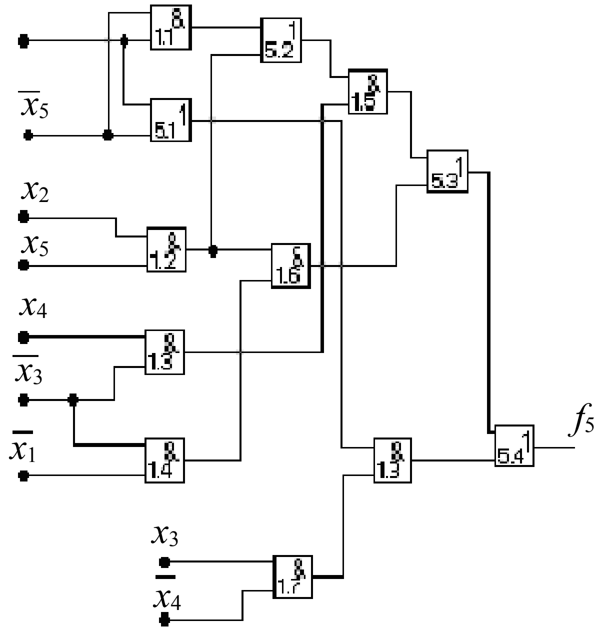
КС данной функции при реализации на элементах И, ИЛИ, с различным числом входов имеет вид (рис.10, а). При реализации такой схемы на двухвходовых элементах (рис.10, б) потребуется 14 элементов. Общее число входов КС (рис.10, б), характеризующее сложность схемы, равно 28.





а) б)

x_1



в)

Рис. 10. Схемы реализации ПФ f_5 на элементах И, ИЛИ

Упрощение технической реализации КС (рис.10, б) может быть получено помимо вынесения за скобки общих элементов

$$f_5 = \overline{x}_3 x_4 (x_2 x_5 \vee x_1 \overline{x}_5) \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_5 \vee x_3 \overline{x}_4 (\overline{x}_5 \vee x_1)$$

выделением одинаковых компонентов ($x_2 x_5$). В данном случае получается КС, состоящая из 12 элементов с общим числом входов 24 (рис.10, в).

Практическое занятие 4 СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ НА ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ И-НЕ и ИЛИ-НЕ

Цель занятия: изучение правил синтеза КС на универсальных логических элементах И-НЕ, ИЛИ-НЕ.

Порядок выполнения задания и содержание отчета

1. Записать значения заданной ПФ на всех наборах аргументов.
2. Найти минимальную ДНФ (КНФ).
3. Перевести полученную ДНФ (КНФ) для ПФ в базис И-НЕ (ИЛИ-НЕ) без ограничения на число входов и базис 2И-НЕ (2ИЛИ-НЕ).
4. Составить комбинационные схемы ПФ в указанных базисах.

Рассмотрим синтез КС в базисах И-НЕ, ИЛИ-НЕ на примере ПФ

$$f_1(\overline{x_1, x_3}) = V(0,1,3,6,7).$$

Минимальное представление ПФ f_1 (I) получается минимизацией обратного значения, ДНФ и КНФ для которого имеют соответственно вид:

$$\overline{f}_1 = \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3, \qquad f_1 = (x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3).$$

Перевод ПФ в базис И-НЕ производится по представлению минимальной ДНФ

- заменой всех дизъюнкций по правилу

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_K = \overline{\overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2 \wedge \ldots \wedge \overline{A}_K},$$

- заменой конъюнкций (без инверсий) по правилу

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_K = \overline{\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_K}},$$

- заменой одной из двойных инверсий по правилу

$$\overline{A} = \overline{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A} \qquad (\overline{A} = \overline{A \cdot A})$$

(число сомножителей в правой части выражений зависит от количества входов у используемых элементов И-НЕ), при реализации эта запись означает, что на все входы элемента И-НЕ подается А.

Тогда ПФ f_1 в базисе И-НЕ без ограничения на число входов у элементов имеет вид:

$$f_1 = \overline{\overline{\overline{\bar{x}_2 x_3} \cdot \overline{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3}}}\,.$$

Схема набора данной ПФ на элементах 2И-НЕ и 3И-НЕ показана на рис.11. Сравнение показывает (см. рис. 6, а; 11), что элементы И и ИЛИ заменяются элементами И-НЕ.

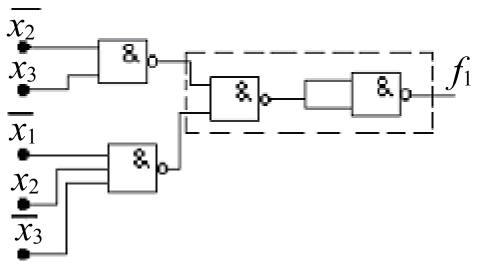


Рис. 11. КС для ПФ f_1 на элементах 2И-НЕ, 3И-НЕ

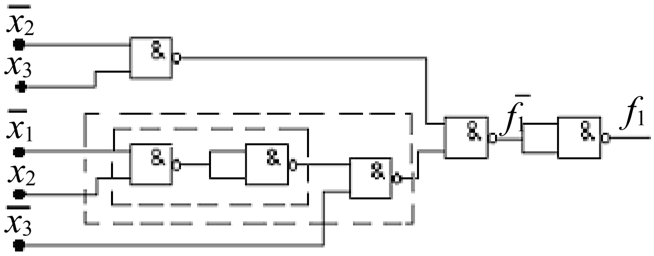


Рис. 12. Схема набора ПФ f_1 на элементах 2И-НЕ, 3И-НЕ

Для реализации КС на элементах 2И-НЕ удобно пользоваться логической функцией Шеффера $(A \mid B = \overline{AB})$ [3]. При этом заданная ПФ переводится в указанный базис по правилам:

- выделяются скобками пары дизъюнкций и конъюнкций (предпочтительным является выделение сочетаний одинаковых букв в разных элементарных конъюнкциях)

$$f_1 = \overline{\overline{\bar{x}_2 x_3 \vee (\bar{x}_1 x_2)\bar{x}_3}};$$

- заменяются пары дизъюнкций конъюнкциями $(A \vee B = \overline{A} \mid \overline{B})$

$$f_1 = \overline{\overline{\bar{x}_2 x_3} \mid \overline{((\bar{x}_1 x_2)\bar{x}_3)}},$$

- заменяются пары конъюнкций $(AB = \overline{A \mid B})$

$$f_1 = \overline{\overline{\overline{(\bar{x}_2 \mid x_3)}} \mid \overline{\overline{((\overline{\bar{x}_1 \mid x_2})\bar{x}_3)}}},$$

- исключаются двойные отрицания, поскольку $\overline{\overline{A}} = A$

$$f_1 = \overline{(\bar{x}_2 \mid x_3) \mid \overline{((\bar{x}_1 \mid x_2)} \mid \bar{x}_3}.$$

Учитывая, что функция Шеффера реализуется на элементах 2И-НЕ, а отрицание получается подачей на оба входа элемента 2И-НЕ одного и того же (инвертируемого) значения, схема набора функции в базисе 2И-НЕ имеет вид (рис.12). Анализ схем (см. рис.11 и 12) показывает, что элемент 3И-НЕ (см. рис.11) заменяется при переходе к базису 2И-НЕ тремя элементами 2И-НЕ (на рис.11 эта группа элементов выделена), один из которых играет роль инвертора.

Для перехода к базису ИЛИ-НЕ в минимальной КНФ функции производится

- замена всех конъюнкций по правилу

$$\bigwedge_{i=1}^{k} B_i = \overline{\bigvee_{i=1}^{k} \overline{B_i}},$$

- замена всех дизъюнкций (без инверсий)

$$\bigvee_{i=1}^{k} B_i = \overline{\overline{\bigwedge_{i=1}^{k} \overline{B_i}}}.$$

Тогда $f_1 = \overline{\overline{(x_2 \vee \bar{x}_3)} \vee \overline{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}}$.

Схема набора ПФ f_1 в базисе ИЛИ-НЕ будет следующей (рис.13).

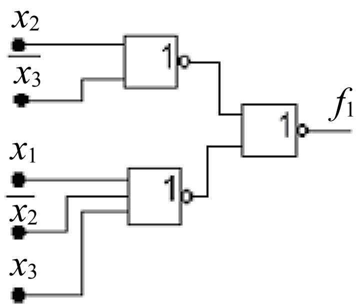


Рис. 13. Комбинационная схема ПФ f_1 на элементах 2ИЛИ-НЕ, 3ИЛИ-НЕ

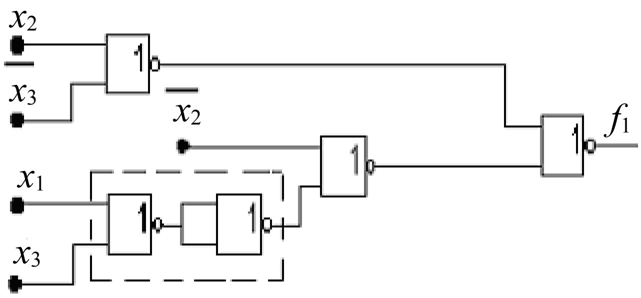


Рис. 14. Комбинационная схема ПФ f_1 на элементах 2ИЛИ-НЕ

Для перевода ПФ в базис 2ИЛИ-НЕ рекомендуется пользоваться логической функцией Пирса $(A \downarrow B = \overline{A \vee B})$ [3] и следующей последовательностью действий:

- выделить скобками пары дизъюнкций и конъюнкций в представлении ПФ в виде КНФ $f_1 = (x_2 \vee \bar{x}_3)[(x_1 \vee x_3) \vee \bar{x}_2]$,

- заменить пары конъюнкций $(AB = \bar{A} \downarrow \bar{B})$

$$f_1 = \overline{(x_2 \vee \bar{x}_3)} \downarrow \overline{[(x_1 \vee x_3) \vee \bar{x}_2]},$$

- заменить пары дизъюнкций $(A \vee B = \overline{A \downarrow B})$

$$f_1 = \overline{\overline{(x_2 \downarrow \bar{x}_3)}} \downarrow \overline{\overline{[\overline{(x_1 \downarrow x_3)} \downarrow \bar{x}_2]}},$$

- исключить двойные отрицания $(\overline{\overline{A}} = A)$ и заменить одиночные отрицания $(\bar{A} = A \downarrow A)$

$$f_1 = (x_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow \{[(x_1 \downarrow x_3) \downarrow (x_1 \downarrow x_3)] \downarrow \bar{x}_2\}.$$

Учитывая, что выражения ($x_1 \downarrow x_3$) используются дважды и объединяются операцией Пирса, выход элемента 2ИЛИ-НЕ, формирующего ($x_1 \downarrow x_3$), подсоединяется к обоим входам следующего элемента 2ИЛИ-НЕ, что тождественно получению операции инверсии. Тогда схема реализации ПФ f_1 на элементах 2ИЛИ-НЕ (рис.14) является четырехуровневой, следовательно, время формирования входного сигнала составляет T=4τ, где τ - время формирования выходного сигнала одним элементом 2ИЛИ-НЕ.

Практическое занятие 5 СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ В СМЕШАННЫХ БАЗИСАХ

Цель занятия: изучение методов синтеза комбинационных схем на логических элементах одной интегральных схем.

Порядок выполнения задания и содержание отчета

1. Записать значения заданной ПФ на всех наборах аргументов.
2. Построить КС для реализации на элементах заданной серии интегральных схем (ИС) с минимальным количеством используемых элементов и (или) минимальным временем формирования выходного сигнала.
3. Проверить правильность работы синтезированной КС.
4. Записать аналитическое выражения для заданной ПФ, позволяющее получить наиболее простую КС на наборе элементов заданной серии ИС.

Рассмотрим пример синтеза КС для функции f_1 из примера 1(I) на двухвходовых логических элементах серии ИС К155 (2И, 2И-НУ, 2ИЛИ, 2ИЛИ-НЕ) [6, 7].

Получение наиболее простой (по количеству элементов) КС при использовании смешанного базиса элементов производится по схемам, построенным в базисах И-НЕ или ИЛИ-НЕ (см. практическое занятие 3). Так, по КС (рис. 14) путем замены пар элементов 2ИЛИ-НЕ и НЕ одним элементом ИЛИ (рис. 15, а) получается схема набора ПФ f_1 на элементах 2ИЛИ-НЕ, 2ИЛИ (рис. 16, а), чем достигается упрощение КС до четырех элементов и сокращение времени формирования выходного сигнала до T= 3τ. Число элементов в КС равно пяти (рис. 6, б, базис 2И, 2ИЛИ, НЕ; T= 4τ), шести (рис. 12, базис 2И-НЕ; T=5τ), шести (рис. 14, базис 2ИЛИ-НЕ; T=4τ).

К подобному упрощению КС рис. 14 до четырех элементов приводит замена элемента 2ИЛИ-НЕ на элемент 2И с инверсией входных переменных (рис. 15, б). КС для ПФ f_1 в этом случае реализуется на элементах 2ИЛИ, 2И, 2ИЛИ-НЕ смешанного базиса (рис. 16, б).

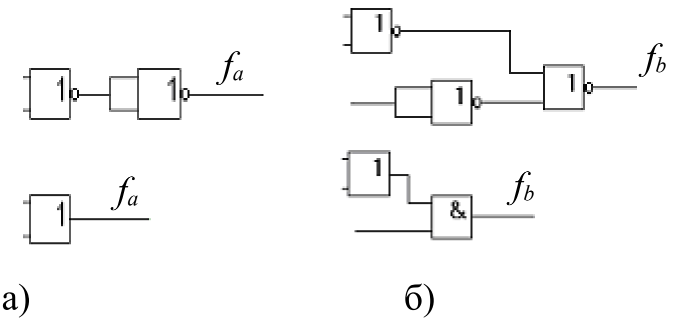
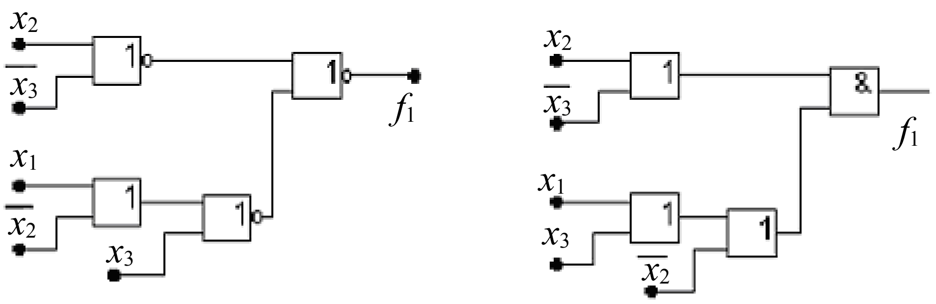


Рис.15. Группы элементов, выполняющие равнозначные функции



а) б)

Рис. 16. Схема набора ПФ f_1 в смешанных базисах

Сравнение всех КС для ПФ f_1 на двухвходовых элементах (рис. 6,б, 12, 14, 16) показывает, что реализация данной ПФ получается более простой при использовании смешанного базиса элементов. Кроме того, количество рангов схемы и, следовательно, время формирования выходного сигнала при этом не возрастают.

Практическое занятие 6 СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕШИФРАТОРОВ И МУЛЬТИПЛЕКСОРОВ

Цель занятия: изучение методов синтеза КС на интегральных схемах средней степени интеграции.

Порядок выполнения задания и содержание отчета

1. Составить функциональную схему заданной ПФ с использованием дешифратора и мультиплексора.
2. Проверить правильность работы синтезированных КС.

В различных сериях интегральных микросхем, выпускаемых в настоящее время, помимо элементов, реализующих простые логические функции И, ИЛИ, НЕ, ИЛИ-НЕ и др., имеются элементы, выходные сигналы которых описываются более сложными логическими функциями. Примерами таких элементов являются дешифраторы и мультиплексоры, реализованные в виде интегральных схем средней степени интеграции. Большие функциональные возможности дешифраторов и мультиплексоров позволяют в ряде случаев существенно упростить процедуру синтеза КС.

В дальнейшем под дешифратором будем понимать КС, имеющую n основных входов и $m \le 2^n$ выходов (при $m = 2^n$ дешифратор называется полным). Помимо основных входов у дешифратора могут быть дополнительные, сигналы на которых разрешают или запрещают реализацию выходных функций. Обозначим логические переменные, подаваемые на основные входы дешифратора через $X_1 X_2,..., X_n,$ а на дополнительные – через $C_1, C_2 ... C_к$. Тогда выходные функции дешифратора $Y_0, Y_1,..., Y_{2^n-1}$ могут быть представлены табл. 4.

Таблица 4

$X\ldots X_3X_2X_1$	$C_k\ldots C_2C_1$	$Y_0Y_1Y_2\ldots Y_{2^n-1}$
0… 0 0 0	1… 1 1	1 0 0 … 0
0… 0 0 1	1… 1 1	0 1 0 … 0
0… 0 1 0	1… 1 1	0 0 1 … 0
……………	………..	………………..
1… 1 1 1	1… 1 1	0 0 0 … 1
X… X X X	X… X 0	0 0 0 … 0
X… X X X	X… 0 X	0 0 0 … 0
……………	…………	………………...
X… X X X	0… X X	0 0 0 … 0

Под X в табл. 4 и последующих таблицах подразумевается произвольное значение логической переменной

Из табл. 4 следует, что при $C_1 = C_2 = ... C_k = 1$ на каждом выходе дешифратор реализуется ПФ, СДНФ которой состоит лишь из одного произведения переменных, определенного номером выхода. Так, на выходе Y_0 реализуется ПФ $f_0(x_1,...,x_n) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 ... \bar{x}_n,$ а на выходе Y_1 - $f_1(x_1,...,x_n) = x_1 \bar{x}_2 ... \bar{x}_n,$ и так далее. Формирование на выходах дешифратора всевозможных 2^n конъюнкций n переменных позволяет очень просто проводить синтез КС. Для этого достаточно на основные входы дешифратора подать переменные реализуемой ПФ, на дополнительные – значения логических единиц, выходы дешифратора, соответствующие произведениям переменных, входящих в СДНФ реализуемой ПФ, соединить со входам элемента ИЛИ, на выходе которого будут формироваться значения ПФ.

Таблица 5

x_3	x_2	x_1	C_1	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Несколько более сложную задачу представляет синтез Кс на дешифраторах, если число переменных реализуемой ПФ больше, чем число основных входов дешифратора. В этом случае требуется более одного дешифратора, каждый из которых имеет хотя бы дополнительный (стробирующий) вход. Пусть, например, требуется провести синтез КС, реализующей функцию $f(x_1,....,x_4) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$ на дешифраторах с тремя основными входами и одним стробирующим входом. Входные функции такого дешифратора определяются табл. 5, а заданная ПФ – табл. 6.

Таблица 6

Аргументы функции		x_2x_1			
		0 0	0 I	I 0	I I
x_4x_3	0 0	0	I	I	0
	0 I	I	0	0	I
	I 0	I	0	0	I
	I I	0	I	I	0

СНДФ заданной ПФ имеет вид:

$$f(x_1,...,x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee$$
$$\vee\ \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4.$$

Преобразуем ее путем вынесения за скобки переменных x_4 и $\bar{x}_4$:

$$f(x_1,..., x_4) = x_4(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3) \vee$$
$$\vee\ \bar{x}_4(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3).$$

В полученном выражении в круглых скобках записаны СНДФ ПФ, зависящих от трех аргументов, которые могут быть реализованы с использованием заданных дешифраторов. Переменная $\bar{x}_4$ должна быть подана на вход C_1 первого дешифратора, а x_4 - на вход C_1 второго дешифратора. Это обеспечит формирование значений заданной ПФ выходными сигналами первого шифратора при $x_4 = 0$ или второго при $x_4 = 1.$ КС, реализующая функцию $f(x_1,...,x_4) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$, приведена на рис. 17.

При наличии инверсных выходов у дешифратора в качестве объединительного вместо элемента ИЛИ должен быть использован элемент И-НЕ. Наличие нескольких дополнительных входов С у дешифратора позволяет реализовать логические функции над переменными, подаваемыми на стробирующие входы.

Проиллюстрируем указанную возможность на примере использования дешифратора с двумя стробирующим входами для реализации ПФ $f(x_1,...,x_4) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4.$ Преобразуем СДНФ функции к виду $f(x_1,...,x_4) = \bar{x}_3\bar{x}_4(x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2) \vee \bar{x}_3x_4(\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2) \vee x_3\bar{x}_4(\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2) \vee$ $\vee\ x_3x_4(\bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2)$ (рис. 18).

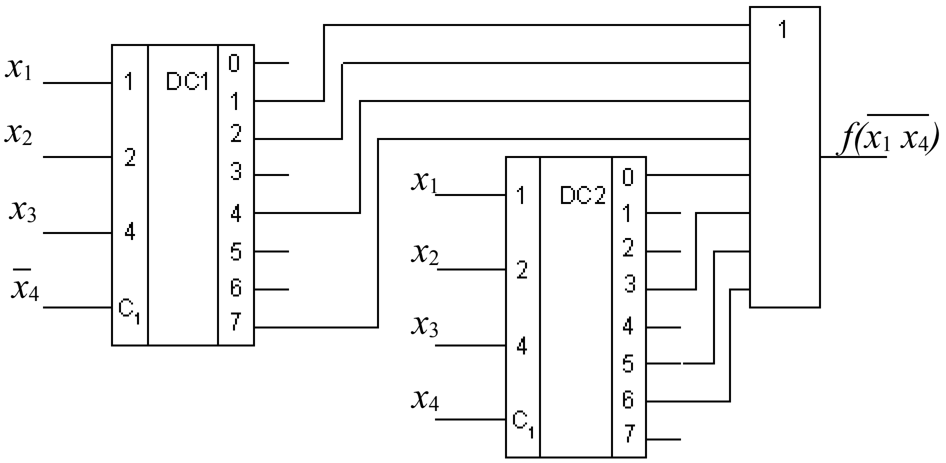


Рис. 17. КС, реализующая ПФ $f(x_1,\dots,x_4) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$

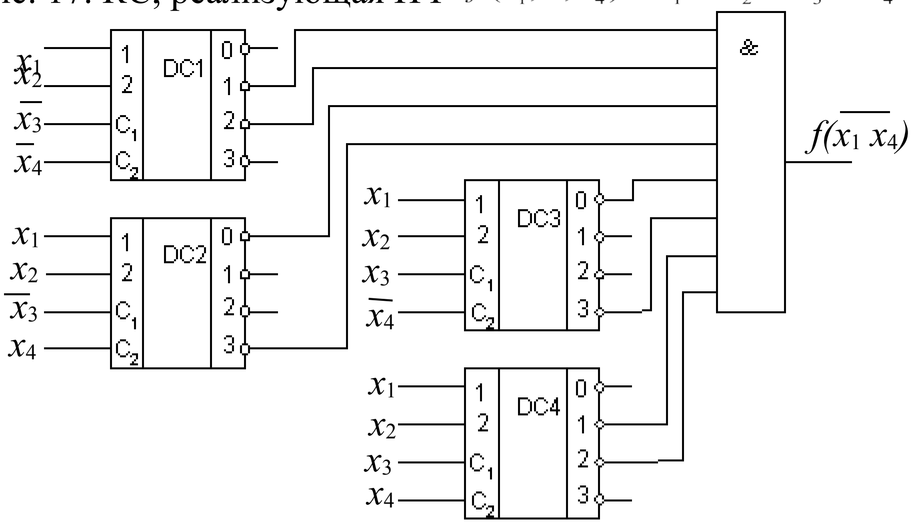


Рис. 18. КС, реализующая ПФ $f(x_1,\dots,x_4) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$, использующая дешифраторы с двумя основными входами

Если число переменных ПФ меньше числа входов дешифратора, то при синтезе КС на свободные входы дешифратора с большими весами должны быть поданы нулевые значения логических переменных.

Рассмотрим теперь методику синтеза КС на мультиплексорах. Мультиплексором будем называть КС, имеющую m управляющих входов, 2^m информационных входов и один выход. Выходной сигнал мультиплексора совпадает с сигналом на *i*-ом информационном входе, если на его управляющие входы подан двоичный код числа *i*. Обозначим управляющие входы мультиплексора $A_1, A_2, \dots, A_m$ а информационные – $B_0, B_1, \dots, B_{2^m-1}$. Тогда выходная функция мультиплексора может быть представлена как ДНФ ПФ, зависящей от $n=(m+1)$ переменных:

$$F(B,A) = B_0 \overline{A}_1 \overline{A}_2 \dots \overline{A}_m \vee B_1 A_1 \overline{A}_2 \dots \overline{A}_m \vee \dots \vee B_{2^m-1} A_1 A_2 \dots A_m .$$

Пусть с помощью мультиплексора требуется провести синтез КС, реализующей ПФ $f(x_1,\dots,x_n)$. Подадим переменные $x_2, x_3, \dots, x_n$ на управляющие входы мультиплексора $A_1, A_2, \dots, A_m$, тогда выходная функция мультиплексора примет вид: $f(B, x_2,\dots,x_n) = B_0 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \dots \overline{x}_n \vee B_1 x_2 \overline{x}_3 \dots, \overline{x}_n \vee \dots \vee B_{2^m-1} x_2 x_3 \dots x_n$

Определим значения переменных, которые необходимо подать на информацонные входы мультиплексора. Для этого выделим в таблице истинности ПФ $f(x_1,\ldots,x_n)$ пары строк, отличающиеся только значением переменной X_1. Таких пар будет 2^m. В каждой паре выделенных строк таблицы истинности сравним значение ПФ $f(x_1,\ldots,x_n)$ со значениями переменной x_1.

Поскольку в одном из наборов пары x_1=0, а в другом x_1=1, то результатов сравнения может быть четыре: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1$, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bar{x}_1$, $f(x_1,x_2,\ldots, \quad x_n)=0\neq x_1$, $f(x_1,x_2,\ldots, \quad x_n)=1\neq x_1$. Результат сравнения определяет, что должно быть подано на информационный вход мультиплексора, номер которого определяется переменными $x_2,x_3,\ldots,x_n$ рассматриваемой пары.

Реализуем, например, с помощью мультиплексора ПФ, заданную табл. 7. Поскольку ПФ зависит от трех переменных, то для синтеза КС требуется мультиплексор с двумя управляющими входами. В последнем столбце (табл. 7) указан номер информационного входа, подключаемого к выходу мультиплексора, при подаче на его управляющие входы переменных x_2 и x_3.

Таблица 7

$x_3x_2x_1$	$f(\overline{x_1,x_3})$	Вход	
0 0 0	I	B_0	$\bar{x}_1$
0 0 I	0	B_0	
0 I 0	I	B_1	1
0 I I	I	B_1	
I 0 0	0	B_2	0
I 0 I	0	B_2	
I I 0	0	B_3	x_1
I I I	I	B_3	

	MS1								MS2							
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	I	I	I	I	I	I	I	I
x_3	0	0	0	0	I	I	I	I	0	0	0	0	I	I	I	I
x_2	0	0	I	I	0	0	I	I	0	0	I	I	0	0	I	I
x_1	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I
$f(\overline{x_1,x_4})$	0	I	0	I	0	I	I	I	0	I	I	I	I	I	I	I
	$B_0=x_1$		$B_1=x_1$		$B_2=x_1$		$B_3=1$		$B_0=x_1$		$B_1=1$		$B_2=1$		$B_3=1$	

Поскольку $f(x_1,0,0)=\bar{x}_1$, то на информационный вход B_0 должна быть подана переменная $\bar{x}_1$. На остальные информационные входы (в порядке возрастания номеров) подаются постоянная единица, постоянный ноль, переменная x_1, поскольку $f(x_1,1,0)=1, f(x_1,0,1)=0, f(x_1,1,1)=x_1$. Заданная ПФ реализует с помощью КС (рис.19).

x_2

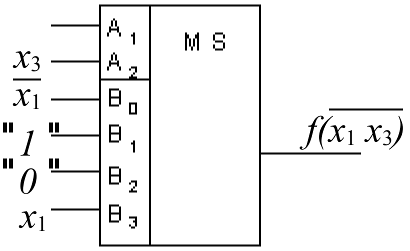


Рис. 19.КС, реализующая ПФ, заданную табл. 7

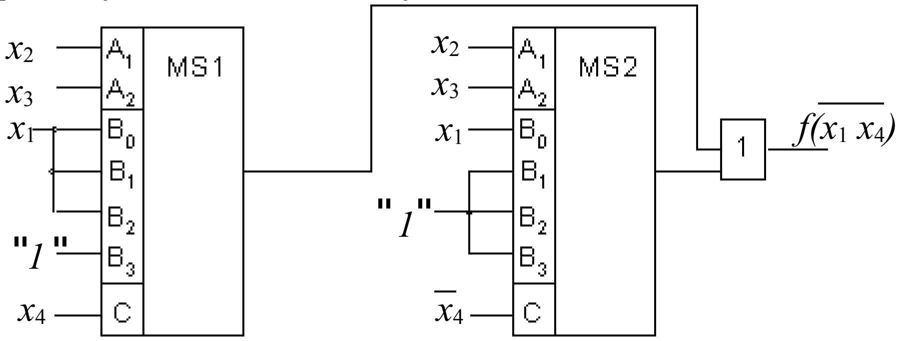


Рис. 20. КС, реализующая ПФ, заданную табл. 8.

При наличии у мультиплексора стробирующих входов для реализации ПФ, зависящей от n переменных, могут быть использованы мультиплексоры с числом управляющих входов меньше чем n-1. Пусть, например, ПФ зависит от четырех аргументов (табл. 8), а для синтеза КС используются мультиплексоры с двумя управляющими входами и одним стробирующим, нулевой сигнал, на котором разрешает работу мультиплексора. Тогда, подав на управляющие входы A_1, A_2 обеих мультиплексоров переменные x_2, x_3, на вход С первого мультиплексора переменную x_4, на вход С второго мультиплексора переменную $\bar{x}_4$, а на информационные входы – переменные, определяемые соотношением значений $f(x_1, x_4)$ и x_1 в парах двоичных наборов при фиксированных значениях x_2, x_3, получим КС, реализующую заданную ПФ (рис. 20). При x_4=0 работает первый мультиплексор, при x_4=1 –второй.

Если требуется обеспечить подачу на большую часть информационных входов мультиплексора логических констант «1» и «0», то следует проанализировать все возможные варианты подачи на управляющие входы переменных реализуемой ПФ. Например, при реализации ПФ $f(x_1, x_4)$ (табл. 8) с помощью мультиплексора с тремя управляющими входами подача на них переменных x_2, x_3, x_4 ведет к тому, что переменная x_1 будет подана на входы B_0, B_1, B_2, B_4. Если на управляющие входы подать переменные x_1, x_2, x_3, то переменная x_4 будет подана только на информационные входы B_2 и B_4. На остальные информационные входы будут поданы константы 0 и 1. Указанную процедуру следует выполнять в тех случаях, когда необходимо снизить нагрузку на выход элемента, формирующего значение логической переменной на информационных входах мультиплексора.

Практическое занятие 7 АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Цель занятия: изучение формализма алгебры высказываний, решение логических задач методами формальной логики.

Язык алгебры высказываний это по существу булева алгебра в широком смысле, которую максимально приблизили к естественному языку. Носителем этой алгебры являются высказывания. Причем под высказыванием здесь понимается любое повествовательное предложение, о котором можно сказать - истинно оно или ложно. Например, «Волга впадает в Каспийское море» – истинное высказывание, а «$2 \geq 3$» – ложное.

Сигнатурой алгебры высказываний является следующее множество логических операций соединения $\Omega = \{ \bar{\ }, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus \}$. Эти операции, как уже отмечалось выше, подобны союзам русского языка и обеспечивают получение из простых высказываний сложные.

Тождества данной алгебры определяются тождествами булевой алгебры, к которым добавляются еще три тождества

$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$ - *определение импликации*;

$x \Leftrightarrow y = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy$ - *определение эквиваленции*;

$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$ - *определение сложения по модулю 2*.

Определение 1. Высказывание называется *атомарным*, если оно соответствует *простому* предложению (т.е. не содержащему в себе соединительных и разделительных союзов и знаков пунктуации) и обозначается некоторым символом как единое и неделимое целое.

Например, высказывание «Алеша, Кирилл, Паша, Володя - ученики третьего класса» не является атомарным, поскольку соответствует предложению содержащему запятые, которые в данном случае определяют логическую операцию – конъюнкцию. Данное высказывание есть конъюнкция четырех атомарных высказываний: «Алеша ученик третьего класса», «Кирилл ученик третьего класса» и т.д.

Для обозначения высказываний условимся использовать прописные буквы русского алфавита: А, Б, …, Я. В случае необходимости будем использовать также и индексы.

Неатомарные (сложные) высказывания в алгебре высказываний изображаются в виде булевых формул. Данные формулы должны удовлетворять определенным правилам записи. Введем понятие *правильно построенной формулы* (ППФ).

Определение 2. Символ, соответствующий атомарному высказыванию есть ППФ. Если $А$ и $Б$ правильно построенные формулы, то $\bar{А}, \bar{Б}, А \wedge Б$, $А \vee Б, А \Rightarrow Б, А \Leftrightarrow Б, А \oplus Б$ - также ППФ. Правила использования круглых скобок для установления порядка выполнения логических операций аналогичны правилам элементарной алгебры.

Булева алгебра и язык высказываний позволяют довольно успешно решать различные логические задачи. Методика их решения при этом может быть задана следующим алгоритмом.

Алгоритм

Шаг 1. Исследовать текст условия задачи. Выделить в нем атомарные высказывания и ввести для них условные обозначения. Следует стремиться к тому, чтобы число таких атомарных высказываний было наименьшим. Это число определяет размерность гиперкуба, включающего в себя область истинности ППФ, определяющей условие решаемой задачи. Чем меньше это число, тем проще формула, подлежащая упрощению.

Шаг 2. Из обозначений атомарных высказываний и логических операций из множества $\Omega = \{\,^{-}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus\}$ построить ППФ, отвечающую содержанию задачи.

Шаг 3. Используя тождества, исключить из ППФ операции «$\Rightarrow$», «$\Leftrightarrow$», «$\oplus$».

Шаг 4. Используя тождества булевой алгебры, упростить ППФ. При этом, если задача имеет единственное решение, то в результате такого упрощения будет получена элементарная конъюнкция, составленная из атомарных высказываний. Если решения не существует, то получится константа 0. Получение константы 1 будет означать, что условие задачи выполняется при любых значениях атомарных высказываний. Если задача имеет k решений, то результат упрощения ППФ даст ДНФ, состоящую из k элементарных конъюнкций.

Шаг 5. Конец.

Таким образом, решение логической задачи с помощью языка высказываний и булевой алгебры состоит в переводе текста условия задачи на язык ППФ и преобразования ППФ в ДНФ.

Пример 10

Определить кто из приятелей солгал и кто не солгал, если они дали такие показания.

– Мы с Борисом не лжем, а лжет Виктор, – сказал Андрей.

– Не знаю, кто лжет, но мы с Андреем не лжем, – сказал Борис.

– Если Андрей лжет, то и Борис лжет, – сказал Виктор.

Решение. Введем обозначения для атомарных высказываний: *А* – «Андрей не лжет»; *Б* – «Борис не лжет»; *В* – «Виктор не лжет». Тогда формула $\bar{А}$ будет означать, что Андрей лжет. Аналогично определится смысл и у формул $\bar{Б}$ и $\bar{В}$. Показания Андрея определятся следующей элементарной конъюнкцией $АБ\bar{В}$. Данная формула будет иметь то же значение, что и формула $А$, откуда следует ППФ $А \Leftrightarrow АБ\bar{В}$. По показаниям Бориса и Виктора аналогичным образом получаются формулы $Б \Leftrightarrow АБ$ и $В \Leftrightarrow (\bar{А} \Rightarrow \bar{Б})$ соответственно (проверьте, что это так). Тогда условие нашей задачи (вся совокупность показаний) определится конъюнкцией последних трех формул, т.е. получается ППФ следующего вида

$$(А \Leftrightarrow АБ\bar{В})(Б \Leftrightarrow АБ)(В \Leftrightarrow (\bar{А} \Rightarrow \bar{Б})).$$

Полученная формула есть перевод на язык алгебры высказываний известных фактов из условия решаемой задачи. Таким образом, шаги 1 и 2 *алгоритма 1* уже выполнены.

Теперь избавимся от операций «$\Leftrightarrow$» и «$\Rightarrow$» (шаг 3). Получим

$$(\bar{А}\,\overline{АБ\bar{В}} \vee ААБ\bar{В})(\bar{Б}\,\overline{АБ} \vee БАБ)(\bar{В}\,\overline{А \vee \bar{Б}} \vee В(А \vee \bar{Б})).$$

Полученную булеву формулу упростим с помощью тождественных преобразований (шаг 4). Будем иметь

$$(\bar{А}(\bar{А} \vee \bar{Б} \vee В) \vee АБ\bar{В})(\bar{Б}(\bar{А} \vee \bar{Б}) \vee АБ)(\bar{В}\,\bar{А}Б \vee ВА \vee В\bar{Б})).$$

Откуда раскрывая скобки получим

$$(\bar{А} \vee АБ\bar{В})(\bar{Б} \vee АБ)(\bar{В}\,\bar{А}Б \vee ВА \vee В\bar{Б}) =$$
$$= (\bar{А}\,\bar{Б} \vee АБ\bar{В}\,\bar{Б} \vee \bar{А}\,АБ \vee АБ\bar{В}АБ)(\bar{В}\,\bar{А}Б \vee ВА \vee В\bar{Б}) =$$
$$= (\bar{А}\,\bar{Б} \vee АБ\bar{В})(\bar{В}\,\bar{А}Б \vee ВА \vee В\bar{Б}) = \bar{А}\,\bar{Б}\,\bar{В}\,\bar{А}Б \vee \bar{А}\,\bar{Б}\,ВА \vee$$
$$\vee \bar{А}\,\bar{Б}\,В\bar{Б} \vee АБ\bar{В}\,\bar{В}\,\bar{А}Б \vee АБ\bar{В}ВА \vee АБ\bar{В}В\bar{Б} = \bar{А}\,\bar{Б}\,В.$$

Получившаяся в результате наших вычислений элементарная конъюнкция означает, что солгали Андрей и Борис, а Виктор сказал правду.

Пример 11

Задача. Девчонки из 6 «В» Кукушкина, Мушкина и Лягушкина получили на 8 Марта в подарок кактус, шкатулку и шоколадку.

1. Если Лягушкина получила кактус, то Мушкина – шоколадку.
2. Если Лягушкина получила шоколадку, то Мушкина – кактус.
3. Если Мушкиной подарили не шкатулку, то Кукушкиной – не шоколадку.
4. Если Кукушкиной достался кактус, то Лягушкиной – шоколадка.
5. Если Кукушкиной досталась шкатулка, то Лягушкиной – кактус.

Мы тут совсем запутались, но ты-то, наверное, сможешь решить, кому что все-таки подарили!

Решение.

Ведем обозначения. Обозначим прописными буквами девочек:

М – Мушкина,
К – Кукушкина,
Л – Лягушкина.

Строчными буквами обозначим полученные девочками подарки:

к – кактус,
ш – шоколадка,
т – шкатулка.

Парой букв, одна из которых прописная, другая строчная обозначим факт получения девочкой соответствующего подарка, например:

Лт – Лягушкина получила шкатулку,
Мк – Мушкина получила кактус,
Кш – Кукушкина получила шоколадку.

Согласно условию задачи каждая девочка получила только один подарок. Например, если Лягушкина получила шоколадку (Лш), то Мушкина и Кукушкина шоколадку получить не могут, в этом случае возможны две альтернативы: Мушкина получила кактус (Мк), Кукушкина – шоколадку (Кт), или Кукушкина получила кактус (Кк), а Мушкина шоколадку (Мш). Выражения, содержащие данную информацию можно записать в виде следующих конъюнкций:

Лш Мк Кт
Лш Кк Мт

В данных выражениях конъюнкция (логическое умножение) подразумевается, хотя явно не обозначена. Очевидно, что в подобных выражениях, представляющих собой возможный с точки зрения единственности подарка вариант, должны присутствовать все буквы (как прописные, так и строчные), причем только единожды, варианты отличаются способами сочетания пар: девочка – подарок. В нашем случае возможны всего шесть вариантов:

Лш Мк Кт
Лш Мт Кк
Лк Мш Кт
Лк Мт Кш (4)

Лт Мш Кк

Лт Мк Кш.

Кроме того, будут ложны все выражения типа

Лш Лк, Мк Мш,

ЛшМш, ЛкКк…,

поскольку у одной девочки может быть только один подарок и один подарок не может достаться разным девочкам.

Запишем выражения, соответствующие условиям задачи:

1. Лк$\to$Мш,
2. Лш $\to$Мк,
3. $\overline{\text{Мт}} \to \overline{\text{Кш}}$,
4. Кк$\to$Лш.
5. Кт$\to$Лк.

Поскольку все эти условия и условие единственности подарка (4) должны выполняться одновременно получим выражение:

(Лш Мк Кт $\vee$ Лш Мт Кк $\vee$ Лк Мш Кт$\vee$Лк Мт Кш$\vee$ Лт Мш Кк$\vee$ Лт Мк Кш)$\wedge$

$\wedge$(Лк$\to$Мш)(Лш $\to$Мк)($\overline{\text{Мт}} \to \overline{\text{Кш}}$)(Кк$\to$Лш) (Кт$\to$Лк).

Избавляясь от импликаций получим:

(Лш Мк Кт $\vee$ Лш Мт Кк $\vee$ Лк Мш Кт$\vee$Лк Мт Кш$\vee$ Лт Мш Кк$\vee$ Лт Мк Кш)$\wedge$

$\wedge$($\overline{\text{Лк}}$$\vee$Мш)($\overline{\text{Лш}}$$\vee$Мк)(Мт$\vee$$\overline{\text{Кш}}$)($\overline{\text{Кк}}$$\vee$Лш) ($\overline{\text{Кт}}$$\vee$Лк).

Отсюда, выполняя элементарные преобразования с учетом получим:

(Лш Мк Кт $\vee$ Лш Мт Кк $\vee$ Лк Мш Кт$\vee$Лк Мт Кш$\vee$ Лт Мш Кк$\vee$ Лт Мк Кш) $\overline{\text{Лк}}$$\vee$ $\vee$Лк Мш Кт$\vee$Лт Мш Кк)($\overline{\text{Лш}}$$\vee$Мк)(Мт$\overline{\text{Кк}}$$\vee$МтЛш$\vee$$\overline{\text{Кш}}$ $\overline{\text{Кк}}$$\vee$$\overline{\text{Кш}}$Лш) ($\overline{\text{Кт}}$$\vee$Лк).

С учетом того, что $\overline{\text{Кш}}$ $\overline{\text{Кк}}$Кт (Кукушкина не получила ни шоколадку, ни кактус тождественно тому, что она получила шкатулку) и $\overline{\text{Кш}}$Лш=Лш (если Лягушкина получила шоколадку, очевидно, что Кукушкина ее не может получить) получим:

(Лш Мк Кт $\vee$ Лш Мт Кк $\vee$ Лк Мш Кт$\vee$Лк Мт Кш$\vee$ Лт Мш Кк$\vee$ Лт Мк Кш) $\overline{\text{Лк}}$$\vee$ $\vee$Лк Мш Кт $\vee$ Лт Мш Кк)($\overline{\text{Лш}}$$\vee$Мк)(Мт$\overline{\text{Кк}}$$\vee$МтЛш$\vee$Кт$\vee$Лш) ($\overline{\text{Кт}}$$\vee$Лк) =

=(Лш Мк Кт $\vee$ Лш Мт Кк $\vee$ Лт Мш Кк $\vee$ Лт Мк Кш $\vee$ Лк Мш Кт) ($\overline{\text{Лш}}$$\vee$Мк)$\wedge$ $\wedge$(Мт$\overline{\text{Кк}}$ $\vee$МтЛш$\vee$Кт$\vee$Лш) ($\overline{\text{Кт}}$$\vee$Лк)=

=(Лт Мш Кк$\vee$ Лт Мк Кш $\vee$ Лк Мш Кт $\vee$Лш Мк Кт)(Мт$\overline{\text{Кк}}$$\vee$ Лш Мт$\vee$ Кт$\vee$Лш)$\wedge$

$\wedge$($\overline{\text{Кт}}$$\vee$Лк) = (Лк Мш Кт$\vee$Лш Мк Кт) ($\overline{\text{Кт}}$$\vee$Лк) = Лк Мш Кт.

То есть, Лягушкина получила кактус, Мушкина – шоколадку, а Кукушкина – шкатулку.

Из последнего выражения видно, что если использовать только первые четыре условия то получим два ответа, не противоречащие в данном случае условию задачи: Лк Мш Кт и Лш Мк Кт, т.е. еще добавляется ответ: Лягушкина получила шоколадку, Мушкина – кактус, а Кукушкина – шкатулку. В общем случае можно получить множество решений, формально выводимых из условия, однако конечно, гораздо интереснее смотрятся те задачи, в которых мы путем применения аппарата алгебры высказываний получаем единственный правильный ответ.

Варианты заданий к практическим занятиям

Ниже приведены варианты заданий ПФ, зависящих от 3, 4 и 5 аргументов, необходимые для выполнения практических занятий 1 – 5. В табл. 9 занесены числовые представления полностью определенных ПФ. В табл.10 представлены неполностью определенные ПФ (числа, записанные в скобках, задают номера наборов аргументов, где ПФ не определена).

Таблица 9

№ п/п	n=5	n=4	n=3
1	2	3	4
1	0,1,2,3,4,6,10,15,19,25,31	0,2,3,4,5,6,7,8,9,10,14	0,1,2,3,4
2	4,7,9,10,12,13,14,15,19,20,22,23,26,31	0,1,2,3,6,7,9,10,11,12,13	0,4,5,6,7
3	3,4,5,6,7,11,12,13,14,15,16,19,20,21,22,25,27,28,30	6,9,10,13,14,15	0,2,4,5,6
4	0,2,3,4,5,6,8,10,18,19,21,22,23,24,25	0,4,6,7,8,9,10,11,14	0,3,4,5,6
5	1,3,5,10,13,14,15,19,22,23,24,25,26,29	0,2,5,6,13,15	0,1,5,6,7
6	2,8,9,10,11,12,15,16,17,18,19,20,23,25,26,31	0,1,2,6,7,8,9	0,5,6,7
7	0,1,3,4,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,20,21,22,23,24,26,28,29,30	0,3,4,5,6,7,8,13,14	0,2,6
8	1,3,4,5,6,7,8,11,13,14,15,17,18,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31	0,1,3,7,8,9,13	3,4,5,6,7
9	2,3,4,5,6,7,11,14,15,16,17,19,22,24,26,27,28,31	1,2,9,10,13,14,15	2,3,4,5
10	1,3,4,5,8,11,12,15,18,19,20,21,25	0,6,7,8,10,11,12,13,14,15	3,6,7
11	0,1,3,5,9,11,12,13,14,15,16,17,22,23,30	0,1,2,3,4,6,10,12	0,2,3,4,6
12	1,2,3,4,5,6,7,9,10,12,13,15,17,19,21,22,24,25, 29, 30	0,1,2,3,4,5,6,8,9,14,15	0,4,5,7
13	1,4,5,7,9,15,20,21,22,23,30,31	4,5,7,9,10,11,12,13	0,2,4,5,6
14	0,1,8,9,12,14,16,17,19,20,21,26,27,29	2,3,6,7,9,11,12,13,14	0,1,3,4

Окончание табл. 9

1	2	3	4
15	1,4,5,6,7,8,12,14,16,20,21,22,23	0,1,5,7,8,9,10,14,15	0,2,5,7
16	3,4,5,6,7,9,11,13,14,18,19,20,21,23,24,25,26,27,30,31	0,1,2,3,4,8,9,10,11,13,15	0,1,5
17	0,1,6,7,16,17,20,22,24,25,29,30	2,3,6,7,8,14,15	1,3,4,6
18	0,4,5,9,13,17,18,19,20,21,22,25,26,29,30	0,1,4,6,8,9,10,11,12,15	0,1,4,5,7
19	1,3,5,8,10,11,12,15,17,19,21,22,23,24,26,28,31	0,1,2,3,4,6,7,9,12,14,15	1,3,5
20	2,5,6,8,9,10,13,15,18,19,20,21,22,23,24,26,27,28,29,31	1,3,5,6,7,10,13,14	0,3,5,6,7
21	2,4,5,9,11,12,13,15,17,18,19,20,21,22,23,24,2	2,3,5,7,8,9,10,11,	0,2,3,4,7

	5,27,29,31	13,15	
22	0,1,4,5,8,9,11,13,18,19,20,21,24,27,29	0,1,2,7,8,9,10,11, 12,13,14,15	0,1,2,6,7
23	1,6,8,9,10,12,14,17,18,19,22,24,25,26,28,30, 31	1,5,6,8,9,10,11,14, 15	0,1,2,4,6, 7
24	1,3,4,5,6,7,8,9,17,19,22,26,28,29	0,1,4,5,6,7,12,13,14	0,4,6,7
25	0,1,2,3,4,6,7,9,11,13,14,15,16,20,24,27,29,30, 31	1,3,7,9,10,11,15	0,1,6
26	2,7,9,10,12,15,18,19,20,24,26,29,30	1,4,7,8,9,10,12, 14,15	2,6,7
27	1,2,3,5,8,10,11,13,14,16,18,19,21,27,28,29	1,5,8,9,13,14,15	0,2,5,6,7
28	0,1,2,3,5,6,11,12,13,16,17,20,21,23,24,27,28, 29,30,31	1,2,3,7,8,9,10,15	0,1,2,4,5, 7
29	5,13,15,16,17,19,21,22,23,24,25,28,29,30	1,4,6,8,9,10,11,12, 14	2,3,4,6
30	2,3,6,7,8,10,15,18,19,20,22,24,26,28,30	1,5,7,10,12,13,14,1 5	2,5,6,7

Таблица 10

№ п/п	n=5	n=4	n=3
1	2	3	4
1	5,7,8,9,10,13,15,18,25,26,27,29,30,31 (11,17,19,21,22,24)	4,11,12,14,15 (5,6,7,10,13)	2,4 (6,7)
2	0,4,5,8,9,10,14,16,21,22,23,25,26,30 (1,2, 6,7,11,13,17,24,29)	0,2,5,7,13,14 (1,4, 6,8,10,15)	1,2,3,6 (5)
3	4,5,9,12,17,19,23,25 (1,3,7,11,18,20,21, 22,24,26,27,28,29,30,31)	1,3,7,8,12,15 (2,9,11, 14)	0,4,7 (1,2,5,6)
4	0,2,5,7,12,18,20,21,22,23,27,29 (1,3,4,6,9, 14,16,17,19,24)	3,12,13 (6,8,9,11, 15)	1,2,4,6 (3)
5	0,6,8,9,14,16,18,20,21,26,28,30 (2,3,5,10,13, 17)	3,8,11,14 (1,2,4,9, 10,13,15)	0,1,3,5, 6,7 (2)

Продолжение табл. 10

1	2	3	4
6	0,1,2,3,4,5,6,12,14,20,26,27,28,29 (7,8,13,16,18,19,21,22,24,30)	1,9,11,12,14 (3,4,7,8,10,15)	1,5,7 (4)
7	0,1,6,8,9,23,24,31 (2,3,5,7,10,11,13,15, 20,22,27,29,30)	0,4,8,10,11,13 (3,5,9,12,14,15)	3 (4,5,6,7)
8	4,9,19,20,23,26,27,28,29,30 (2,3,6,8,10,11,12,13,24,25,31)	0,2,3,6,8,14 (1,4,7,12)	0,4,6 (2,3,5,7)
9	0,4,6,14,16,17,21,29 (1,3,5,7,9,11,13,15,18, 19,20,24,25,26,27,28,31)	0,7,13 (4,5,9,11,14,15)	3,4 (0,1, 2,5,6)
10	4,7,8,10,11,13,15,20,27 (5,6,9,14,16,21, 22,23,29)	8,13,15 (0,6,7,10, 11,12,14)	1,3,4,5 (0,6,7)
11	0,8,12,14,15,17,26,30 (1,7,9,10,16,18,20,22,	4,5,8,11	0,3,4,6

	24,28,31)	(1,3,6,7,9,13)	(7,2)
12	4,5,12,17,19,21,23 (0,2,3,6,13,16,20,22, 24,25,30)	5,6,7,8,12 (0,1,3,4,10,11,15)	0,1,5,7 (2,4,6)
13	0,1,5,12,13,15,20,21,24,28,29 (6,8,11, 14,16,17,25,26,27)	3,7,8,11,15 (2,9, 13,14)	6, 0 (2,5,7)
14	0,2,3,11,16,26,27,30 (7,9,19,21,24,27,28)	0,1,2,5,6,8 (9,10,12,14)	1,4,5 (2,6,7)
15	2,4,8,14,19,22,27,28,30 (1,3,6,7,10,11,12,15, 18,20,23,24,26,29)	1,4,5,7,12,13 (0,2, 6,9,11)	0,2,6 (1,3,5,7)
16	2,6,10,12,13,14,22,23,24,26 (0,1,7,18,25, 27,28,29)	7,8,11,13,15 (0,1,2,3,5)	1,4,5,7 (0)
17	2,7,9,22,23,26,31 (4,5,6,8,10,12,13,14,15, 19,28,29,30)	0,8,10,11,12, (1,9,13,14)	0,3 (2,4)
18	0,2,4,6,8,20,23,28,30 (3,5,7,9,11,16,19, 24,26,27,29,31)	0,2,4,6,9,11,12 (5,8,13,14)	1,6 (2,4)
19	2,5,6,7,15,18,19,22,23,24,25,26,27,28,31 (0,3,8,9,10,13,14,29)	1,2,5,8,11 (3,4,7,9,10,12,13)	1,2,3 (5,6,7)
20	1,4,6,12,14,15,16,17,21,23,26 (0,2,3,8,10, 18,19,28,29,31)	2,3,7,10,13,14,15 (0,5,6,9)	3,6 (0,2,5)
21	0,1,3,17,18,23,25,28,30 (2,4,6,7,8,12,16,19, 21,22,27,31)	2,7,8,10,13,15 (0,3,4,5)	1,2,3,6,7 (0,5)
22	1,8,11,24,25,31(3,6,7,9,10,13,15,16,19,23,26,28,30)	0,6,12,14 (1,2,4,5, 8)	0,1,4,5,6 (2)
23	3,4,5,7,9,18,26 (0,1,11,15,19,23,24,25, 27,28,30,31)	0,4,5,8,12 (1,3,7, 10,14)	0,3,4,5,7 (2,6)
24	0,2,5,9,14,16,17,19,25,29,30,31 (1,3,4,7,10, 13,15,18,26)	1,4,6,12,14,15 (2,5,7,9)	0,4,7 (1,2,3,5)
25	0,2,3,8,11,12,13,18,20,26 (5,13,16,19,21,24,25, 27,28)	0,3,9,10,15 (1,2,8, 11,12,13,14)	2,6 (0,1,3,7)
26	0,2,3,4,5,8,14,16,17,18,19 (1,7,10,12,17,21, 24)	2,5,7,12,13,14 (1,3,4,6,8,9,10)	0,2,4,5,7 (3,6)

Окончание табл. 10

27	1,3,9,10,17,23,25,26,29 (0,5,6,11,15,16, 20,21,27,31)	7,8,10,11,12,13 (0,1,2,3,9)	0,1,2 (3,4,5,6)
28	2,3,4,5,8,12,13, 16,17,28 (0,14,21,23,29,30)	0,2,3,5,11,13,15 (7,9,12)	1,4,5,6 (0,2,7)
29	1,11,22,24,25,26,27,29 (4,8,12,15,17,18,30,31)	0,1,3,6,9,10,11,12, 13 (4,5,7,14,15)	1,3,5,6 (0,7)
30	6,7,10,11,12,14,15,19,22,27 (0,2,3,4,8,9,18,25, 28,31)	0,2,4,12,14 (8,10, 11,13,15)	1,2,4,6 (0,1,3,5)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев А.Я. Основы информатики. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2001. – 327 с.

2. Савельев А. Я. Арифметические и логические основы цифровых автоматов. – М.: Высш. школа, 1980. – 255 с.

3. Майоров С. А., Новиков Г. И. Принципы организации цифровых машин. – Л.: Машиностроение, 1974. – 432 с.

4. Проектирование цифровых вычислительных машин / Под ред. С. А. Майорова. М.: Высш. школа, 1972. – 344 с.

5. В.И. Потапов и др. Основы компьютерной арифметики и логики: Учеб. пособие / В.И. Потапов, О.П. Шафеева, И.В. Червенчук. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2004. – 172 с.

6. Нефедов А.В. Интегральные микросхемы и их зарубежные аналоги: Справочник: в 8 т. – М.:ИП РадиоСофт, 2001.

7. Интегральные микросхемы: Справочник / Под ред. Б. В. Тарабрина. – М.: Энергоатомиздат, 1985.– 528 с.

8. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Прикладная теория цифровых автоматов» / Сост. И.А. Пальянов, О.П. Шафеева. – Омск: Изд-во ОмПИ, 1987. – 36 с.

СОДЕРЖАНИЕ